Hoja 2 de ejercicios. Autómatas y computabilidad.
Facultad de Matemáticas. UCM

1. Simplifica las siguientes expresiones regulares: $(\epsilon + ab)^*$, $(a(a+b)^*)^+$, $ab((ab)^*ab + (ab)^*) + (ab)^*$

2. Escribe la expresión regular correspondiente al lenguaje cuya definición recursiva es la siguiente: 1) $\epsilon \in L$; 2) Si $w \in L$ entonces se cumple que $001w \in L$ y $w11 \in L$.

3. Expresa mediante una expresión regular el lenguaje de todas las palabras de longitud menor o igual que 3, suponiendo que el alfabeto usado es $\Sigma = \{a, b\}$.

4. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, demuestra que es regular el lenguaje formado por todas las palabras de longitud par. Hazlo proporcionando una expresión regular que lo caracterice. Repite el ejercicio, pero esta vez con las palabras de longitud impar.

5. Dados $E_1 = 0^* + 1^*$, y $E_2 = 01^* + 10^* + 1^*0 + (0^*1)^*$, y siendo L_1 y L_2 los lenguajes caracterizados por dichas expresiones regulares, encuentra la palabra más corta que pertenece a cada uno de los siguientes lenguajes:

   a) $L_1 \backslash L_2$;

   b) $L_2 \backslash L_1$;

   c) $L_1 \cap L_2$;

   d) $\{0, 1\}^* \backslash (L_1 \cup L_2)$.

6. Dada la ER $((ab)^*b + ab^*)^*$, construye un AFN-ϵ que la reconozca.

7. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, escribe la expresión regular que caracteriza a las cadenas cuyo penúltimo carácter es una a. Especifica el AFD correspondiente a dicha ER.

8. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, escribe la expresión regular que caracteriza a las cadenas de longitud 3. Especifica el AFD correspondiente a dicha ER.

9. Siendo L_1 y L_2 los lenguajes correspondientes a los dos ejercicios anteriores:

   a) Especifica la ER correspondiente a L_1L_2;

   b) Construye un AFD que reconozca L_1L_2;

   c) Explica qué tipo de cadenas contiene el lenguaje L_2L_1;

   d) Construye el AFD que reconoce L_2L_1;

   e) Construye el AFD que reconoce el complementario de L_2;

   f) Construye el AFD que reconoce el complementario de L_1;

   g) Construye el AFD que reconoce $L_2 \setminus L_1$;

   h) Construye el AFD que reconoce $L_1 \setminus L_2$.

10. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, escribe una ER para el lenguaje de las cadenas que no contienen la subcadena aa. A partir de dicha ER, construye un AFN-ϵ equivalente. Transforma dicho AFN-ϵ a un AFN, y posteriormente a un AFD.

11. Repite el ejercicio anterior pero para el lenguaje cuyas cadenas terminan en b.

12. Repite el ejercicio anterior pero para el lenguaje resultante de hacer la intersección de los lenguajes de los dos ejercicios anteriores.

13. Repite el ejercicio anterior pero para el lenguaje cuyas cadenas terminan en ab.

14. Demuestra que dos cadenas $w_1, w_2 \in PAL$ son distinguibles siempre que $w_1 \neq w_2$. ¿Puede ser PAL un lenguaje regular? ¿Puede ser regular el lenguaje $\{a^nb^n | n > 0\}$?

15. Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, construye un AFD que reconozca los múltiplos de 3. Lógicamente, el significado de recibir un 0 en la entrada equivale a multiplicar por 2 el número que llevábamos recibido hasta el momento, mientras que recibir un 1 significa multiplicar por 2 y sumar 1. Indicación: Los distintos estados del AFD representarán los distintos posibles valores de calcular el resto de un número módulo 3. Es decir, debes distinguir entre el 0, el 1 y el 2, mientras que 4, 7, 10, 13, etc son equivalentes al 1.

16. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, define un autómata finito determinista que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que no contienen la subcadena baa. A partir de dicho autómata finito determinista, aplica algún método automatizable para obtener la expresión regular correspondiente a dicho autómata finito. Simplifica la expresión regular obtenida.

17. Repite el ejercicio anterior para el lenguaje de todas las cadenas que empiezan por a y que no contienen la subcadena aba.

18. Dada la expresión regular $(ab^*)^* + (b + ab)^*a$, aplica automáticamente las reglas de traducción para obtener un AFN-ϵ.

19. Dado el AFN-ϵ cuya función de transición viene dada por la siguiente tabla

δ	ϵ	a	b
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\{q_5\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_1\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_6, q_7\}$
q_6	$\emptyset$	$\{q_5\}$	$\emptyset$
q_7	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

   a) Calcula el cierre ϵ de cada uno de los estados;
   b) Calcula $\delta^*(1, ba)$, $\delta^*(1, ab)$ y $\delta^*(1, ababa)$.

20. Repite el ejercicio anterior suponiendo que la tabla es

δ	ϵ	a	b
q_1	$\{q_2, q_6\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_5\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_1\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4, q_1\}$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_6, q_7\}$
q_6	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_5\}$	$\emptyset$
q_7	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

21. Calcula la ER equivalente al AFD $(\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_3\})$, donde la función de transición es

δ	a	b
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_1

22. Repite el ejercicio anterior para el AFD $(\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_2\})$ tal que

δ	a	b
q_1	q_2	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_2	q_1

23. Repite el ejercicio anterior para el AFD $(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_2, q_3\})$ tal que

δ	a	b
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_3
q_3	q_4	q_4
q_4	q_1	q_2

24. Dado el AFN-ϵ de la tabla, donde q_0 es el estado inicial y q_4 y q_7 son los estados de aceptación:

   - Calcula el cierre-ϵ de todos los estados.
   - Calcula $\delta^*(q_3, abba)$.
   - Aplica algún método automatizable para obtener un AFD equivalente.

	ϵ	a	b
q_0	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_6\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_4	$\emptyset$	$\{q_5\}$	$\{q_4, q_0\}$
q_5	$\{q_6\}$	$\emptyset$	$\{q_7\}$
q_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1, q_4\}$
q_7	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$